О фрактальных структурных моделях динамических систем.

Лаборатория ОСЕНС. Москва. 2003

Аннотация. Обсуждается возможность построения моделей динамических систем с поведением более сложным, чем поведение композиции из конечного набора элементов упругости, вязкости и массы. Показано, как бесконечные самоподобные структурные схемы могут быть сведены к дифференциальным уравнениям с дробными порядками дифференцирования.

Введение

Как известно идеально-упругих тел в природе не существует. В 1678 г. Роберт Гук открыл линейную зависимость силы от деформации для определенного класса изделий и определенных диапазонов усилий и деформаций. В механику вошла абстракция под именем элемент Гука – образ идеальной пружины. Для элемента Гука сила деформации зависит от величины деформации линейным образом. И хотя Британская Королевская комиссия по железу "отменила" закон Гука в 1849 г.[1], значимость абстрактной пружины в простейших динамических моделях осталась безусловной.[*] Если представлять величину деформации как нулевую производную деформационной координаты, то естественным будет введение идеальных элементов с линейными коэффициентами при первых и вторых производных, то есть – для скорости и ускорения. Идеальный элемент, сила деформации которого, линейно зависит только от скорости деформации, называют вязким элементом Ньютона. Аналогично линейный коэффициент при ускорении (второй производной) "деформационной" координаты[**] – это величина инерционной массы. Комбинации из множества элементов этих трех типов поведения способны создавать сложное динамическое целое.[***] Например, у маятника (пружина + масса) есть собственная частота колебаний, а для цепи (или даже паутины) из разных маятников возникает спектр (дискретный) собственных колебаний. Это хорошо известные факты. Однако вполне возможно предположить существование некоторых идеальных элементов, для которых сила деформации зависит от нецелых порядков производных (derivative of arbitrary order). Тогда возникают нормальные вопросы: как же интерпретировать такие элементы и чем они могут быть полезны?

---

[*] Следует отметить, что даже сам Гук предполагал огромное значение линейной зависимости в мире предметов техники. Он зашифровал "свой" закон дабы использовать его как "ноу-хау" в производстве часовых механизмов.

[**] Можно было бы назвать, например, элементом Галилея …

[***] Мы не обсуждаем здесь вопрос об элементарном поведении, пропорциональном высшим (≥ 3) порядкам производных по времени. Мы также не включаем в рассмотрение достаточно простые, но важные элементарные поведения, связанные с "сухим трением" и ограничением свободного хода ("люфт").

О цепных (непрерывных) дробях

Выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}} \tag{1}$$

называется цепной дробью и условно записывается в виде

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] \tag{2}$$

Всякая конечная цепная дробь

$$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] \tag{3}$$

может быть представлена в виде отношения многочленов

$$\frac{P(a_0, a_1, a_2, \dots)}{Q(a_0, a_1, a_2, \dots)} \tag{4}$$

Каждому положительному вещественному числу α соответствует единственная цепная дробь с натуральными элементами, имеющая это число своим значением. Эта дробь конечна, если число α рационально, и бесконечна, если оно иррационально.[2] Таким образом, кроме хорошо известной позиционной записи действительных чисел с помощью цифр, существует весьма непохожая запись в виде последовательности натуральных чисел.

Здесь хотелось бы обратить внимание на особенности чисел с конечным количеством символов в изображении чисел. Некоторым образом это можно интерпретировать как эффективное информационно-операциональное удобство числа.

Для позиционной системы записи (например, десятичной) можно рассмотреть вариант записи рационального числа:

$$a = 0,a_1...a_m a_1...a_m... = 0,(a_1...a_m)\,, \tag{5}$$

что означает

$$a = a_1 \cdot 10^{-1} + ... + a_m \cdot 10^{-m} + a_1 \cdot 10^{-(m+1)} + ... + a_m \cdot 10^{-2m} + ... = b + a \cdot 10^{-m}\,, \tag{6}$$

где $b = 0,a_1...a_m$. Видно, что для выражения рационального числа можно использовать формульную процедуру с некоторым самоподобием. С этой точки зрения рациональные числа эффективны.

Для систем цепных дробей можно рассматривать аналогичные "самоподобные" записи вида

$$[0;a_1...a_m a_1...a_m...] = [0;(a_1...a_m)] \tag{7}$$

Такие дроби называются периодическими.

"Всякая периодическая цепная дробь изображает квадратическую иррациональность и, обратно, всякая квадратическая иррациональность изображается периодической цепной дробью"[3]. Формула самоподобия цепной дроби выглядит следующим образом

$$A = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{.........}{a_m + \cfrac{1}{A}}}}} \tag{8}$$

Используя самоподобие не только для простых цепных дробей, но и для так называемых цепных деревьев, можно кодировать конечными символическими последовательностями не только квадратичные иррациональности. Например:

$$A = \frac{1}{a_1 + A + \dfrac{1}{a_2 + A}} \qquad (9)$$

О возможности представления "неклассических" моделей

Покажем, как цепные дроби используются для описания вязкоупругих систем. Акцентировать внимание станем на качественной стороне вопроса, поэтому будут опущены совокупности деталей, особенно необходимых при точном решении задач.

Будем использовать операторную форму записи динамических выражений.

Элемент Гука:  $F_H = k \cdot x \;\mapsto\; \hat{F}_H = k \cdot \hat{x}$

Элемент Ньютона:  $F_N = \eta \cdot \dot{x} \;\mapsto\; \hat{F}_N = \eta \cdot p \cdot \hat{x}$

Последовательное соединение элементов Гука и Ньютона дает элемент Максвелла:  $\hat{F}_M = \left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{\eta \cdot p} + \dfrac{1}{k}} \right) \cdot \hat{x}$,

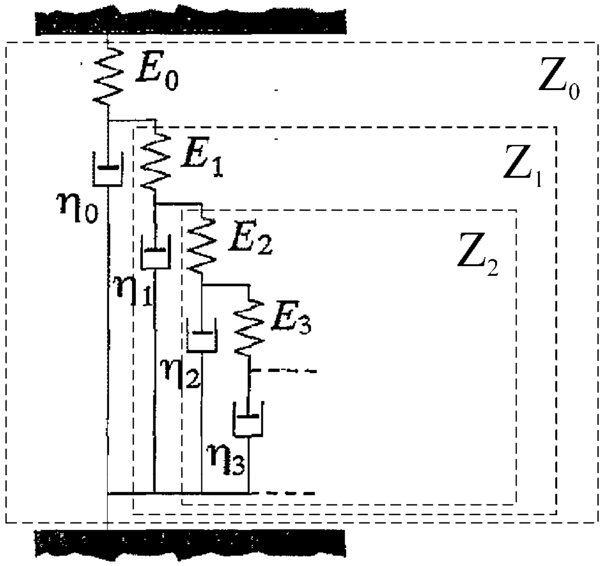
а параллельное – элемент Кельвина:  $\hat{F}_K = (\eta \cdot p + k) \cdot \hat{x}$.

Наиболее общее операторное выражение для произвольной комбинации из конечного числа "упругостей" и "вязкостей" есть рациональная операторная функция (отношение двух операторных полиномов конечной степени):

$$\hat{F} = \frac{P_m(p)}{Q_n(p)} \cdot \hat{x} \quad , \tag{10}$$

в котором целые числа m и n отличаются не более чем на единицу.

В работах Schiessel и др.[4], анализируя вязкоупругие свойства полимеров, привели ряд частных моделей соединения бесконечного числа "вязкостей" и "упругостей" по следующей схеме:



Последовательно выписывая все соединения можно получить для тотального оператора $\hat{F} = Z_0(p) \cdot \hat{x}$

$$Z_0(p) = E_0 + \frac{1}{\dfrac{1}{\eta_0 p} + \dfrac{1}{Z_1(p)}} = E_0 + \frac{1}{\dfrac{1}{\eta_0 p} + \dfrac{1}{E_1 + \dfrac{1}{\dots}}} \quad , \tag{11}$$

то есть выражение типа цепной дроби, которое формально должно выглядеть как отношение полиномов "бесконечной степени":

$$Z_0(p) = \frac{P_\infty(p)}{Q_\infty(p)} \quad . \tag{12}$$

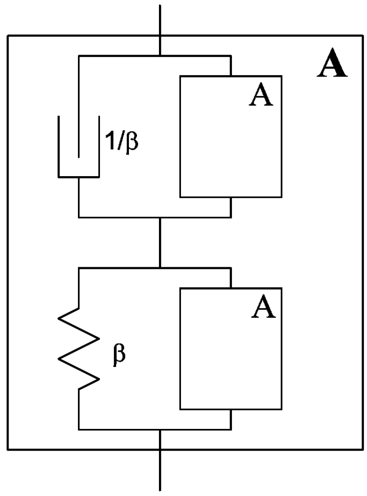
Если в выражении (11) участвуют элементы с $E_0, E_1, \ldots = E$ и $\eta_0, \eta_1, \ldots = \eta$, тогда тотальный оператор становиться "квадратичной иррациональностью". Разумеется, возможны и другие простые варианты сведения бесконечных цепных дробей к алгебраическим выражениям. Всевозможные иррациональности получаются при использовании цепных деревьев, которые обобщают понятие цепной дроби.

Пример. Допустим, нам надо построить модель элемента, в котором сила деформации пропорциональна дробной производной порядка $\frac{1}{2}$ ("квадратному корню из оператора дифференцирования"). Пусть оператор $\hat{A} = p^{1/2}$ имеет смысл бесконечного набора соединений (параллельных и последовательных) одинаковых пружин и демпферов (элементов Гука и Ньютона).

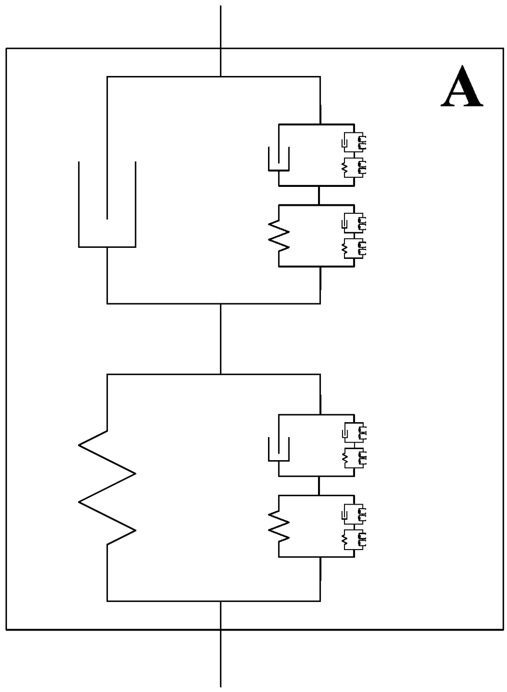
$\hat{A}^2 = p$. Добавим справа и слева члены $\beta \cdot \hat{A}$ при $\forall \beta \in R_+$ (положительные значения β берутся для того, чтобы конечные выражения имели физический смысл). Получим $\hat{A}^2 + \beta \cdot \hat{A} = p + \beta \cdot \hat{A}$ или $\hat{A} = \frac{p + \beta \cdot \hat{A}}{\beta + \hat{A}}$. Последнее выражение можно привести к виду:

$$\hat{A} = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\beta} p + \hat{A}} + \cfrac{1}{\beta + \hat{A}}} \quad , \tag{13}$$

где очевидно самоподобие. Структурная схема для формулы (13) выглядит так:



А после раскрытия графического самоподобия структурная схема для формулы (13) выглядит с условно-графическим устремлением в интенсивное бесконечное:



Выводы

Проиллюстрирована структурная схема фрактального типа. Самоподобные (фрактальные) свойства модели, которые проявляются на уровне структуры, связаны с "неклассическим" поведением зависимости силы от деформации: $F = A\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x$. Параметр α может принимать действительные значения от нуля до двух, что соответствует диапазону от силы Гука до силы инерции массивного тела. В этом случае сложное поведение может быть сконструировано или аппроксимировано с помощью комбинации элементарных поведений (или через рациональные функции, или через цепные деревья). Однако в целом такое сложное поведение не может быть *линейной* комбинацией "классических" элементарных, поэтому оно носит самостоятельный характер. Для успешного описания явлений связанных с динамическим воздействием на материальные системы следует расширить класс возможных модельных элементов. Это может быть класс дифференциальных (псевдодифференциальных) операторов с непрерывным диапазоном порядка дифференцирования, который обобщает класс элементарных моделей идеальной упругости Гука, вязкости Ньютона и инерционной силы. Общий класс становиться полезным для формирования описательных систем в материаловедении, а также модельных систем в механике, реологии, теории автоматического управления. Интуиция подсказывает, что число объектов природы с динамическими свойствами общего типа существенно выше числа "классических" объектов, которые описываются ДУ с целочисленными производными.

Ссылки

---

[1] Белл Дж.Ф., Экспериментальные основы динамики деформируемых твердых тел, т.1, М., 1984, с. 109

[2] Хинчин А.Я., Цепные дроби, М, 1961, с. 25

[3] Хинчин А.Я., Цепные дроби, М, 1961, с. 62

[4] Schiessel H., Mentzler R., Blumen A., Nonnenmacher T.F., Generalized viscoalastic models: thear fractional equations with solutions. Theoretische Polymerphysik, J. Phys. A: Math. Gen., 28(1995), 6567-6584. А также Schiessel H., Blumen A., Hierarchical analogues to fractional relaxation equation. Theoretische Polymerphysik, J. Phys. A: Math. Gen., 26(1993), 5057-5069