О применении "дробного исчисления"

к механическим задачам.

Лаборатория ОСЕНС. Москва. 2003

Аннотация. Обсуждается применение производных и интегралов дробного порядка в механических задачах. Сделан неформальный вывод для формул "дробного исчисления". Обсуждается проблема континуальных моделей "силовых" механических систем.

Введение

В традиционных курсах дифференциального исчисления понятию производной обычно предшествует введение понятия непрерывной функции. Изложение математических курсов выстраивается так, что возникает картина, когда специфика дискретных систем становится вторичной по отношению к основным непрерывным и аналитическим объектам. Дискретные (или иные «разрывные») системы становиться удобнее рассматривать, как предельные свойства непрерывных систем.

С другой стороны, в интегральном исчислении, которое в преподавании традиционно следует за дифференциальным, первичными объектами анализа являются все же дискретные суммы. А интегралами называются пределы соответствующих интегральных сумм.

Хорошо известно, что профессиональные математики не должны увлекаться содержательной стороной формального математического аппарата (а кто в наше время не желал бы считаться профессионалом?) Математическая литература вычищается от иллюстраций, образов и интерпретаций собственного текста. В том числе и от естественных ассоциаций. Что касается «первичности» непрерывного, которое следует только из логики преподавания математического анализа, то эта «первичность» становиться ненавязчиво конкретной, и уже в дальнейшем может проявляться в некотором специальном физическом тексте. Непрерывное очень серьезно толкуется в наивных физических картинах мира, проецируя всего лишь язык изложения математических дисциплин на объяснение природы. Возникали, и будут возникать горячие споры о дискретности или непрерывности, как в отдельных областях физического знания, так и в областях, тематически связанных с фундаментальными первоосновами мироздания. Между тем, гораздо более сильное предложение заключается в том, что ни мир, ни какое-либо явление не могут быть изначально дискретными или непрерывными. Имеет смысл спокойно относиться к прагматике познавательных действий (в том числе и собственных), дабы, оставаясь научно-честными перед явлениями природы, не уменьшать ценности разнообразных точек зрения.

Неформальный вывод формул для дробного исчисления

Рассмотрим понятие производной для некоторой функции, как частный случай исчисления конечных разностей, и, следовательно, из некоторой дискретной конструкции. Еще английский математик Брук Тейлор (Brook Taylor 1685-1731) пришел к «теореме Тейлора» отправляясь от конечных разностей. Значение какой-либо величины легче интерпретировать, как среднее значение инструментально измеряемой на некотором, пусть очень малом, но конечном промежутке (времени, пространства). Следуя модернизированной схеме Тейлора, построим таблицу, в которой размещены всевозможные разности при равномерном разбиении x на Δx:

x		$x+\Delta x$		$x+2\Delta x$		$x+3\Delta x$	$\dots$		$\dots$
y		y_1		y_2		y_3	$\dots$		$\dots$
	Δy		Δy_1		Δy_2		$\dots$		$\dots$
		$\Delta^2 y$		$\Delta^2 y_1$		$\dots$	$\dots$		$\dots$
			$\Delta^3 y$		$\Delta^3 y_1$	$\dots$	$\dots$		$\dots$
				$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots.$		$\dots$

Для разностей различных порядков справедливы выражения, которые можно заметить из таблицы:

$$\Delta^1 y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

……………………………………………………

Общая формула для разности порядка n имеет следующий вид:

$$\Delta^n y_i = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot y\left(x_i + n\cdot\Delta x - k\cdot\Delta x\right) \ . \qquad (1)$$

Здесь $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ – известная формула для биномиальных коэффициентов, выраженная через факториалы.

Используя формулу (1) можно вычислять пределы при устремлении Δx к нулю следующих отношений:

$$\frac{\Delta^1 y_i}{\Delta x^1};\ \frac{\Delta^2 y_i}{\Delta x^2};\ \frac{\Delta^3 y_i}{\Delta x^3};\ \dots , \qquad (2)$$

и, которые, должны определять производные различных порядков в точке x_i (если, конечно, они существуют).

«Дифференциальное исчисление» великого математика, члена Петербургской академии наук Леонарда Эйлера также начиналось с исчисления конечных разностей. Им же введена так называемая гамма-функция комплексной переменной $\Gamma(z)$, которая при $\mathrm{Re}(z) > 0$ определяется интегралом:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \qquad (3)$$

В своих частных свойствах, гамма-функция является обобщением функции факториала. Важно то, что гамма-функцию можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость, за исключением точек $z = 0, -1, -2, \dots$, в которых она имеет полюсы первого порядка.[1]

Собственно здесь мы используем «факториальные» свойства $\Gamma(z)$ для положительных и отрицательных действительных чисел:

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)\,; \quad \Gamma(n+1) = n!\ . \qquad (4)$$

На рис.1 показано ее поведение вдоль действительной оси.

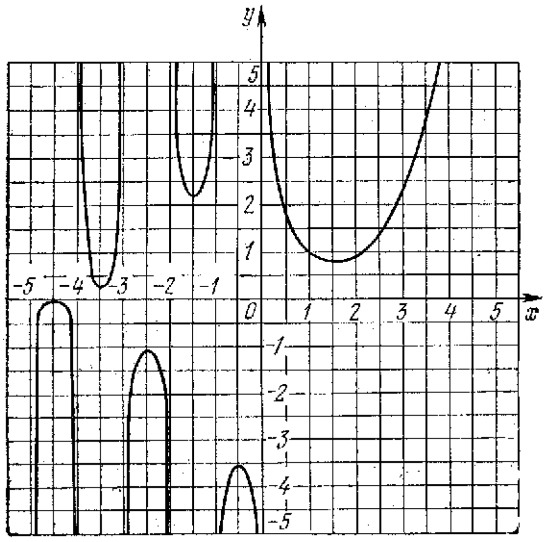

Рис. 1

Поскольку гамма-функция допускает вышеуказанные обобщения, то можно построить обобщение формулы (1) для разности произвольного порядка:

$$\Delta^{\alpha} y_i = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \cdot y\left(x_i + \alpha \cdot \Delta x - k \cdot \Delta x\right)\ , \qquad (5)$$

где α – необязательно целое и положительное число. При этом вместо традиционных биномиальных коэффициентов используются выражения

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1) \cdot \Gamma(\alpha-k+1)} \qquad (6)$$

Рассмотрим частные случаи значений α.

1) Если $\alpha = m$ – целое неотрицательное, то благодаря полюсам гамма-функции выражение

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \dfrac{m!}{k!(m-k)!}, & k \le m \\ 0, & k > m \end{cases} \qquad (7)$$

полностью совпадает с биномиальными коэффициентами в (1). Следовательно, выражения $\dfrac{\Delta^1 y_i}{\Delta x^1}$, $\dfrac{\Delta^2 y_i}{\Delta x^2}$, $\dfrac{\Delta^3 y_i}{\Delta x^3}$ и т.д., определенные по новой формуле позволят вычислять обычные производные различных целых порядков.

2) Если $\alpha = 0$, тогда

$$\binom{\alpha}{k} = \binom{0}{k} = \frac{\Gamma(1)}{k!\cdot\Gamma(1-k)} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \ge 0 \end{cases} \qquad (8)$$

Следовательно, $\dfrac{\Delta^0 y_i}{\Delta x^0} = y(x_i)$.

3) Если $\alpha = -1$, то после подстановки выражение $\dbinom{-1}{k} = \dfrac{\Gamma(0)}{k!\cdot\Gamma(-k)}$ содержит неопределенное отношение простых полюсов. Учитывая свойство $\Gamma(z+1) = z\cdot\Gamma(z)$, получаем $\Gamma(0) = (-1)^k \cdot k!\cdot\Gamma(k)$ и $\dbinom{-1}{k} = (-1)^k$.

Таким образом

$$\frac{\Delta^{-1} y_i}{\Delta x^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k} \cdot y\left(x_i - (k+1)\cdot\Delta x\right)\cdot\Delta x = -\sum_{k=1}^{\infty} y\left(x_i - k\cdot\Delta x\right)\cdot\Delta x . \qquad (9)$$

Это выражение при условиях, обеспечивающих математическую корректность, можно рассматривать, как интегральную сумму, которая при $\Delta x \to 0$ даст выражение для определенного интеграла с переменным верхним пределом

$$\int_{-\infty}^{x} y(x)dx \qquad (10)$$

Связь между определенными и неопределенными интегралами известна.

«$\int \Phi(x)dx = \int_a^x \Phi(t)dt + C$ Замечательную эту формулу читают: *неопределенный интеграл есть сумма определенного интеграла с переменным верхним пределом и постоянным нижним плюс прибавочное произвольное постоянное*»[2].

4) Если α – дробное, положительное или отрицательное число, то сходимость ряда (5) при $\Delta x \to 0$ определит величину дробного «дифферинтеграла» в точке x_i.

О характере применения дробного исчисления в механике

Отношение первых разностей, когда независимой переменной является время, имеет прозрачную физическую интерпретацию. Это обычно представляется, как «средняя скорость» точечного объекта на некотором конечном интервале времени. То есть скорость, вычисленная при перемещении объекта из начала временного интервала в конец. Соответственно отношения разности второго порядка считается «средним ускорением» на некотором интервале. А отношение разностей нулевого порядка есть точная координатная функция точечного объекта. Дробные разности не дают аналогичных интерпретаций, которые можно приписать точечным свойствам объекта или малого интервала, – скорее это свойства всего пути-траектории в целом. Именно поэтому свои смысловые интерпретации дробные производные (вернее дифференциальные уравнения с дробными производными) часто находят в описаниях диффузионных процессов, в которых объект моделирования принципиально считается распределенным, и рассматриваются всевозможные распределения плотности. В классической же механике воплотились два метода вычисления движения систем, представимых в виде точки некоторого, иногда даже очень абстрактного пространства. В одном, берущем начало от Ньютона, движение считается однозначно определенным, если известны все силы и моменты сил. Другой метод, происходящий от Лейбница, носит название «аналитической механики». Здесь движение вычисляется из двух скалярных величин – потенциальной и кинетической энергии, которые своей четкой «определенностью» могут определять направление и траектории движений материального точечного объекта (диссипативные процессы естественно мешают «определяемости»). Исторически сложилось так, что успехи «аналитической механики» нивелировали разнообразие возможных сил, действующих на материальные объекты. Например, элементарное поведение при вязком трении – вязкость Ньютона – рассматривается за пределами «классической аналитической» механики: в механике сплошных сред, реологии. Реология в свою очередь вынуждена возвращаться к вопросам построения элементарных моделей действительного разнообразия сил. Модели Кельвина, Максвелла, Фойгта, Сен-Венана, Бюргерса, Шведова и др. могут считаться элементарными, так как они одноосны и линейны, достаточно просты, и не сводимы друг к другу только лишь линейной комбинацией.

Любопытно, что классическая механика формулируя аксиомы своих аналитических процедур, опирается на экспериментальный материал физического познания. «Принцип детерминированности Ньютона.

Начальное состояние механической системы (совокупность положений и скоростей точек системы в какой-нибудь момент времени) однозначно определяет все ее движения.

Мы не успеваем удивиться этому факту, так как узнаем его очень рано. Можно представить себе мир, в котором для определения будущего системы нужно в начальный момент знать также и ускорения. Опыт показывает, что наш мир не таков»[3]. Однако, в реологии можно «представить себе мир», в котором есть не только координаты, скорости и ускорения, но и «промежуточные» величины. «Ползучесть многих материалов описывается ядром Абеля $k = \lambda \cdot I_{\alpha}$. При этом величина деформации сверху ничем не ограничена, но скорость деформации все время убывает. Существуют эксперименты по ползучести пластиков, продолжавшиеся 100 000 часов (около 12 лет). Зависимость $e(t)$ (*деформации*) на всем протяжении испытания была степенной без какой-либо тенденции к выходу на горизонтальную асимптоту» [4].

Можно вспомнить, что слово «динамика» происходит от греческого $\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\sigma$ со значением сила, мощь, возможность. Но «реальное» описание многообразия (динамических) поведений появилось в реологии. «Термин «реология» приводит на ум выражение «$\pi\alpha\nu\tau\alpha \quad \rho\varepsilon\iota$» (*все течет*). С таким же основанием мы можем сказать: «любое тело есть твердое». Между жидкостями и твердыми телами имеется скорее количественное, чем качественное различие… …мы, например, считали бетон жидкостью со временем релаксации $\approx 10^{6}\,сек$, а воздух твердым телом со временем релаксации $\approx 10^{-10}\,сек$. Если же считать бетон твердым телом и воздух жидкостью, то такое рассмотрение не представляет интереса для реолога»[5].

Следует признать довольно содержательную дистанцию между двумя выше обозначенными областями механики. Если в первой вводится галлилеева относительность пространственно-временных координат, то во второй – относительность масштаба динамического воздействия и релаксации. В первой, «классической» существенны точные координаты, а также первые и вторые производные движения. Во второй, явление в общем случае неизбежно следует представлять в виде спектров или комбинаций релаксационных процессов, и, следовательно, целостность явления содержит в себе неопределенность, связанную со «сверхбольшими» и «сверхмалыми» измерениями. Если по определенным правилам допускать неопределенность в аналитические процедуры, то оправдано применение в моделировании динамических систем дробного исчисления, которое «нелокально». Даже приближенное вычисление дробных производных и интегралов должно заключать в себе практически неосуществимое суммирование бесконечных рядов. Oldham & Spanier ввели вариант дробного исчисления включающей «окно наблюдения» между x и x_0:

$$D^{s}_{x_0,x} = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{x-x_0}{m}\right)^{-s}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\begin{pmatrix} s \\ k \end{pmatrix} y\left(x-k\frac{x-x_0}{m}\right). \qquad (11)$$

Однако качество нелокальности остается и в этом случае.

Интересно, что нелокальность может проявлять себя в структурных схемах в виде бесконечных цепей. Элемент, специфичный для высокоэластичных деформаций, независимый от гуковского и ньютоновского, и выражающийся через операцию дробного интегрирования предложен еще в 1961 году Слонимским[6]. В настоящее время есть работы, в которых подобные элементы строятся в виде иерархических и бесконечных цепей простейших элементов Гука и элементов Ньютона (например, Schiessel & Blumen[7]). В лаборатории ОСЕНС считают[8], что различного вида алгебраические выражения от операторов дифференцирования, в том числе и дробные степени операторов, получаются при введении структуры самоподобия в описание специальных элементов. В этом случае структурная формула приобретает вид бесконечного цепного дерева, а в частности – вид бесконечных цепных дробей, как в работах Schiessel & Blumen и др. авторов. Однако в принципе все элементы с дробными дифферинтегралами не являются *линейными* комбинациями элементов с нулевой (Гук) и первой (Ньютон) производной, так как комбинаторная схема включает в себя как последовательные, так и параллельные соединения. Следует рассматривать специальные суммы (и даже интегралы) с операторами в виде дробного дифферинтегрирования в качестве естественных моделей упругих, вязкоупругих и иных мягко-жестких явлений. Происходит переход от дискретных структурных моделей механических систем к моделям со свойствами континуальности. Характеристики явления, а, следовательно, параметры суммирования возможно оценивать только в привязке к определенным масштабным классам динамических воздействий. В таком случае значение некоторых понятий (например, мягкость) становится параметризованным от значения масштабного фактора.

Добавление.

Следует коротко сказать об истории дробного «диффер-интегрирования». То, что степень производной графически записывается по форме алгебраической степени, не было простым совпадением. Еще Лейбниц (Leibniz) в 1695 г. в письме к Лопиталю (l'Hopital) обсуждал выражение для $d^{\frac{1}{2}}x$. В 1819 г. Lacroix использовал гамма-фунуцию для выражения $\frac{d^m}{dx^m}x^n$, в котором $m = \frac{1}{2}$. Грюнвальд (Grunwald) в 1867 г. вывел «differintegration» в терминах бесконечного ряда. «Дробное исчисление» с помощью комплексных интегралов развивали Коши и Гурса. Основную концепцию дифференцирования произвольного порядка сформулировал Летников[9]. Детальное происхождение определения Римана-Лиувилля обсуждается в монографии Миллера и Росса[10]. В 1960 г. Балакришнан установил обобщенные выражения дробных степеней замкнутых операторов[11].

Ссылки

[1] Никифоров А.Ф., Уваров В.Б., Основы теории специальных функций, М., 1974

[2] Лузин Н.Н., Интегральное исчисление, М., 1958, с. 72

[3] Арнольд В.И., Математические методы классической механики, М., 1989, с. 12

[4] Работнов Ю.Н., Механика деформируемого твердого тела, М., 1988, с. 587

[5] Рейнер М., Реология, М., 1965, с. 201

[6] Слонимский Г.Л., ДАН СССР, 1961, т.140, с. 343

[7] Schiessel H., Blumen A., Hierarchical analogues to fractional relaxation equation. Theoretische Polymerphysik, J. Phys. A: Math. Gen., 26(1993), 5057-5069

[8] О фрактальных структурных моделях динамических систем. Лаборатория ОСЕНС. Москва. 2003

[9] Letnikov A.V. , An explanation of fundamental notions of the theory of differentiation of fractional order, Mat. Sb. 6 (1872) 413-445.

[10] Miller K.S., Ross B., An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993

[11] Иосида К., Функциональный анализ, М., 1967